Cátedra Battocchio
Guía de Ejercicios

Problema 1. Dado el siguiente problema

$$\max_{u_t, u_{t+1}} \sum_{t=0}^{3} (1 + y_t - u_t^2) \quad \text{s.a} \begin{cases} y_{t+1} = y_t + u_t \\ y_0 = 0, u_t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se pide hallar las trayectorias óptimas de las variables de control y estado en forma recursiva.

Problema 2. Dado el siguiente problema

$$\max_{x_t, u_t} V = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 \quad \text{s.a} \begin{cases} x_{t+1} = 2x_t + u_t \\ x_0 = 5, u_t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Resolver utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange.

b) Resolver utilizando el método de programación dinámica de Bellman.

Problema 3. Dado el siguiente problema

$$\min_{u_t, u_{t+1}} \sum_{t=0}^{3} (x_t^2 + u_t^2) \quad \text{s.a} \begin{cases} x_{t+1} = x_t + u_t \\ x_0 = 0, x_4 = 8 \end{cases}$$

Se pide plantear la ecuación de Bellman, derivar la ecuación de Euler, y hallar las trayectorias de las variables de control y estado.

Problema 4. Dado el siguiente problema de programación dinámica

$$\max_{x_t, u_t} \sum_{t=0}^{T-1} (-2/3u_t) + \ln(x_T) \quad \text{s.a} \begin{cases} x_{t+1} = x_t(1 + u_t) \\ x_0 > 0 \\ u_t > -1 \end{cases}$$

Se pide:

a) Hallar u_{T-1}, u_{T-2} y u_{T-3}.

b) A partir del inciso anterior generalizar u_t para todo t.

c) Hallar x_t.

Problema 5. Dado el siguiente problema de optimización intertemporal discreto:

$$\max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln c_t}{(1+\omega)^t} \quad \text{s.a} \begin{cases} s_{t+1} = (1+\sigma)(s_t - c_t) \\ s_0 \text{ y } s_{T+1} \text{ dados} \\ 0 < \sigma < 1, \quad 0 < \omega < \sigma \end{cases}$$

donde c_t es el consumo, s_t es el stock de capital y $1/(1+\omega)$ es el factor de descuento. Se pide:

a) Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange.

b) Plantear la ecuación de Bellman en valor presente.

c) Hallar la ecuación de Euler para los incisos a) y b).

d) Obtener la solución general de c_t.

e) Realizar el diagrama de fase de c_t.

f) Obtener la solución general de s_t.

g) Imponer las condiciones de borde y hallar las constantes indeterminadas.

Problema 6. Dado el siguiente problema del inversor donde x_t es la cantidad de dinero en el t-ésimo año, y u_t es la cantidad de dinero reinvertido:

$$\max \sum_{t=1}^{T} b \cdot \sqrt{x_t - u_t} \quad \text{s.a} \begin{cases} x_{t+1} = a \cdot u_t \\ 0 \leq u_t \leq x_t \\ x_1 \text{ dado} \end{cases}$$

a) Plantear la ecuación de Bellman y hallar la ecuación de Euler.

b) Plantear el lagrangiano y hallar la ecuación de Euler.

c) Resolver el problema recursivamente.

Problema 7. Dado el siguiente modelo de crecimiento económico

$$\max U = \sum_{t=0}^{\infty} 2 \cdot \beta^t \sqrt{c_t} \quad \text{s.a: } k_{t+1} = a(k_t - c_t), \text{ con } k(0) = 0$$

donde c_t es el consumo en t, k_t el capital en t, $\beta \in (0,1)$ y $a > \beta^{-1}$. Se pide:

a) Plantear la ecuación de Bellman y hallar la ecuación de Euler.

b) Resolver la ecuación Euler para obtener la trayectoria temporal del consumo.

c) Realizar el diagrama de fase de c_t y clasificar la trayectoria.

Problema 8. Dado el siguiente modelo de crecimiento económico

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t \quad \text{s.a} \begin{cases} k_{t+1} = \frac{k_t^\alpha - c_t + (1-\delta)k_t}{1+n} \\ k_0 > 0 \end{cases}$$

donde c_t es el consumo en t, k_t el capital en t, y $\alpha, \beta, \delta \in (0,1)$. Se pide:

a) Plantear la ecuación de Bellman y hallar el sistema de dos ecuaciones en diferencias de primer orden en (c, k).

b) £El sistema del inciso anterior es lineal?

c) Hallar el punto de equilibrio.

d) Verificar si se cumple la condición de transversalidad en el equilibrio.

e) Linealizar el sistema en un entorno del punto de equilibrio y clasificarlo, suponiendo que $\alpha = \beta = \delta = n = 1/2$.

Bellman para Desarrollar con Euler

Problema 9.

$$\max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

s.a. $s_{t+1} = (1+r)(s_t - c_t) \quad \forall t = 0, \ldots, T$ con $s(0) = s_0, 0 < \theta < 1, \beta = (1+\delta)^{-1}, r, \delta > 0$.

Problema 10.

$$V_0(k_0) = \max_{\{c_t\}} \sum_{n=0}^{2} \beta^n \sqrt{c_n}$$

s.a. $k_{t+1} = (1+r)k_t - c_t$, k_0 dado.

Problema 11.

$$V_0(w_0) = \max_{\{c_t\}} \sum_{k=0}^{T} \beta^k \ln c_k$$

s.a. $w_{t+1} = w_t - c_t$, w_0 dado, $w_T = 0$.

Problema 12.

$$\max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t}$$

sujeto a $x_{t+1} = x_t - u_t$ para $t = 0, \ldots, T$ con $x_0 = c$, $x_{T+1} = 0$.

Problema 13.

$$V_0(x_0) = \max_{\{y_t\}} \sum_{k=0}^{2} \left(y_k - \frac{y_k^2}{2x_k} \right)$$

s.a. $x_{t+1} = x_t - y_t$, $x_0 = 800$.

Bellman Recursivo - Programacion Dinamica

Basado en "Further Mathematics for Economic Analysis" y "Ejercicios de Bellman"

Problema 14. (a) Use el Teorema 12.1.1 para resolver el problema:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{2} [1 - (x_t^2 + 2u_t^2)], \quad x_{t+1} = x_t - u_t, \quad t = 0, 1 \quad (*)$$

donde $x_0 = 5$ y $u_t \in \mathbb{R}$. (Calcule $J_s(x)$ y $u_s^*(x)$ para $s = 2, 1, 0$.)

(b) Use la ecuación en diferencias en (*) para calcular x_1 y x_2 en términos de u_0 y u_1 (con $x_0 = 5$), y encuentre la suma en (*) como una función S de u_0, u_1, y u_2. Luego, maximice esta función como en el Ejemplo 2.

Problema 15. Considere el siguiente caso especial del Problema 2, donde $r = 0$:

$$\max_{u_t \in [0,1]} \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t x_t}, \quad x_{t+1} = \rho(1 - u_t)x_t, \quad t = 0, \ldots, T-1, \quad x_0 > 0$$

(a) Calcule $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$, $J_{T-2}(x)$. (Pista: Pruebe que $\text{máx}_{u \in [0,1]}[\sqrt{u} + A\sqrt{1-u}] = \sqrt{1 + A^2}$ con $u = 1/(1 + A^2)$.)

(b) Muestre que la función de control óptimo es $u_s(x) = 1/(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{T-s})$, y encuentre la $J_s(x)$ correspondiente, $s = 1, 2, \ldots, T$.

Problema 16. Considere el siguiente problema de horizonte infinito:

$$\text{máx} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (v_t x_t)^{1-\gamma}, \quad x_{t+1} = a(1 - v_t)x_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \quad v_t \in (0, 1) \quad (i)$$

Problema 17. Considere el problema:

$$\max_{u_t \in (-\infty, \infty)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-e^{-u_t} - \frac{1}{2} e^{-x_t} \right), \quad x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \quad x_0 \text{ dado}$$

donde $\beta \in (0, 1)$. Encuentre una constante $\alpha > 0$ tal que $J(x) = -\alpha e^{-x}$ resuelva la ecuación de Bellman, y demuestre que α es única.

Problema 18. (a) Considere el siguiente problema con $\beta \in (0, 1)$:

$$\max_{u_t \in (-\infty, \infty)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(-\frac{2}{3} x_t^2 - u_t^2 \right), \quad x_{t+1} = x_t + u_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \quad x_0 \text{ dado}$$

Suponga que $J(x) = -\alpha x^2$ resuelva la ecuación de Bellman. Encuentre una ecuación cuadrática para α. Luego, encuentre el valor asociado de u^*.

(b) Observando la función objetivo, muestre que, para cualquier valor inicial x_0, es razonable ignorar cualquier política que no satisfaga $|x_t| \leq |x_{t-1}|$ y $|u_t| \leq |x_{t-1}|$ para $t = 1, 2, \ldots$. £Aplica entonces la Nota 2?

Problema 19. (a) Reemplace la función de utilidad en el Problema 2 (el ítem anterior) por $\sum_{t=0}^{T} (1 + r)^{-t} u_t x_t$. Calcule $J_T(x)$, $u_T^*(x)$, $J_{T-1}(x)$, y $u_{T-1}^*(x)$ para $x \geq 0$.

(b) Pruebe que existen constantes P_s (dependiendo de ρ y r) tal que $J_s(x) = P_s x$ para $s = 0, 1, \ldots, T$. Encuentre $J_0(x)$ y los valores óptimos de $u_0, u_1, \ldots, u_T$.

Problema 20. Considere el problema:

$$\max_{u_t\in[0,1]} \sum_{t=0}^{T}(3-u_t)x_t^2, \quad x_{t+1}=u_t x_t, \quad t=0,\ldots,T-1, \quad x_0 \text{ es dado}$$

(a) Calcule las funciones de valor $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$, $J_{T-2}(x)$, y las funciones de control óptimo correspondientes $u_T^*(x)$, $u_{T-1}^*(x)$, y $u_{T-2}^*(x)$.

(b) Encuentre una expresión para $J_{T-n}(x)$ para $n=0,1,\ldots,T$, y los controles óptimos correspondientes.

Problema 21. Resuelva el problema:

$$\max_{u_t\in[0,1]} \sum_{t=0}^{T-1}\left[-\frac{1}{2}u_t^2+\ln x_t\right], \quad x_{t+1}=x_t(1+u_t), \quad t=0,\ldots,T-1, \quad x_0>0 \text{ dado}$$

Problema 22. (a) Considere el problema:

$$\max_{u_t\in\mathbb{R}} \sum_{t=0}^{T}\left[-(e^{-\gamma u_t})-\alpha e^{-\gamma x_t}\right], \quad x_{t+1}=2x_t-u_t, \quad t=0,1,\ldots,T-1, \quad x_0 \text{ dado}$$

donde α y γ son constantes positivas. Calcule $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$, y $J_{T-2}(x)$.

(b) Pruebe que $J_s(x)$ se puede escribir de la forma $J_s(x)=-\alpha_s e^{-\gamma x}$, y encuentre una ecuación en diferencias para α_s.